

The main result of this paper is the following statement.

T h e o r e m. Let conditions $(f1) - (f3)$ and (M) hold. In addition, assume that there exist $R_0 > r_0 > 0$ such that

$$\langle w, f(t, w) \rangle_H < 0.$$

for all $w \in H: r_0 < \|w\|_H < R_0$ and a.e. $t \in I$.

Then problem (1)–(2) admits a solution satisfying $\|x(t)\|_H \leq R_0, \forall t \in [0, T]$.

Sketch of the proof. Let $r_* \in (r_0, R_0)$ be an arbitrary number and denote

$$Q = \{x \in C([0, T]; H): \|x(t)\|_H \leq r_*, t \in [0, T]\}.$$

For each $n \in \mathbb{N}$ set $Q^{(n)} = Q \cap C([0, T]; H_n)$ and consider the problem

$$\begin{aligned} x'(t) &= P_n f(t, x(t)), \text{ for a.e. } t \in [0, T], \\ x(0) &= P_n Mx, \end{aligned} \quad (3)$$

whose solution is considered in the space $C([0, T]; H_n)$.

It is shown that problem (3) has a solution $x_n \in Q^{(n)}$. The existence of a solution of problem (1)–(2) is obtained from the weak convergence of the set $\{x_n\}$.

REFERENCES

1. J. Andres, L. Malaguti, V. Taddei, On boundary values problems in Banach spaces, Dyn. Sys. Appl., 18 (2009): 275-302.
2. Nguyen Van Loi, Method of guiding functions for differential inclusions in a Hilbert space, Differ. Uravn. 46 (2010), no. 10, 1433-1443 (in Russian); English transl.: Differ. Equat. 46 (2010), no. 10, 1438-1447.
3. N.V. Loi, V. Obukhovskii, P. Zecca, Non-smooth guiding functions and periodic solutions of functional differential inclusions with infinite delay in Hilbert spaces, Fixed Point Theory, 13(2), 565-582, 2012.

Лой Н.В. О НЕЛОКАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С помощью метода непрерывности, метода ограничивающей функции и метода приближений, доказывается теорема существования для класса нелокальных дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах. Ключевые слова: нелокальное дифференциальное уравнение; ограничивающая функция.

УДК 517.977

ОБ АППРОКСИМАЦИИ КОНФЛИКТНО-УПРАВЛЯЕМЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

© Н.Ю. Лукоянов, А.Р. Плаксин

Ключевые слова: теория управления; уравнения с запаздыванием; уравнения нейтрального типа.

Для конфликтно-управляемых систем функционально-дифференциальных уравнений рассматриваются процедуры управления с поводирем, движение которого описывается аппроксимирующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Эта работа, восходящая к [1–3] и посвященная процедурам управления с поводырем [4], инициирована работой [5], в которой предложено использовать в качестве поводырей систем дифференциальных уравнений с запаздыванием аппроксимирующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений из [1–3]. Цель работы — развитие подобной процедуры управления для достаточно общего класса функционально-дифференциальных систем.

Пусть движение динамической системы, описываемая уравнением запаздывающего типа

$$\dot{x}[t] = f(t, x_t[\cdot], u, v), \quad t \in [t_0, T], \quad x[t] \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{U}, v \in \mathbb{V}, \quad x_{t_0}[\vartheta] = z[\vartheta], \quad \vartheta \in [-h, 0]. \quad (1)$$

Здесь t — время; $x[t]$ — вектор состояния в момент t ; $h = \text{const} > 0$; $x_t[\cdot]$ — история движения на $[t-h, t]$: $x_t[\vartheta] = x[t+\vartheta]$, $\vartheta \in [-h, 0]$. Функция $z[\cdot]$ лежит в компакте $Z \subset C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, u — управление, v — помеха, $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ компактны. Допустимы измеримые реализации $u[t_0[\cdot]T] = \{u = u[t] \in \mathbb{U}, t_0 \leq t < T\}$ и $v[t_0[\cdot]T] = \{v = v[t] \in \mathbb{V}, t_0 \leq t < T\}$. Отображение $f: [t_0, T] \times C([-h, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{U} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно, справедлива оценка

$$\|f(t, x[\cdot], u, v)\| \leq c(1 + \max_{\vartheta \in [-h, 0]} \|x[\vartheta]\|), \quad c = \text{const} > 0,$$

для любого компакта $D \subset C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ существует такое $\lambda(D) > 0$, что

$$\|f(t, x'[\cdot], u, v) - f(t, x''[\cdot], u, v)\| \leq \lambda(D) \max_{\vartheta \in [-h, 0]} \|x'[\vartheta] - x''[\vartheta]\|, \quad x'[\cdot], x''[\cdot] \in D,$$

и для всякого $s \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(t, x[\cdot], u, v), s \rangle = \max_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} \langle f(t, x[\cdot], u, v), s \rangle.$$

Возьмем $m \in \mathbb{N}$, $\Delta h = h/m$ и определим аппроксимирующую систему:

$$\begin{aligned} \dot{y}^{[0]}[t] &= f(t, S(Y[t])[\cdot], \tilde{u}, \tilde{v}), \quad \dot{y}^{[i]}[t] = (y^{[i-1]}[t] - y^{[i]}[t])/\Delta h, \quad i = \overline{1, m}, \\ t \in [t_0, T], \quad y^{[i]}[t] &\in \mathbb{R}^n, \quad \tilde{u} \in \mathbb{U}, \quad \tilde{v} \in \mathbb{V}, \quad y^{[i]}[t_0] = y^{[i]}, \quad \|y^{[i]} - z[-i\Delta h]\| \leq \eta, \quad i = \overline{0, m}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $Y[t] = (y^0[t], y^1[t], \dots, y^m[t])$, $S(Y[t])[\cdot]$ — линейный сплайн с узлами $-i\Delta h$ на $[-h, 0]$ и со значениями в узлах $S(Y[t])[-i\Delta h] = y^{[i]}[t]$.

Базируясь на разбиении $\Delta_\delta = \{t_j : 0 < t_{j+1} - t_j < \delta, j = \overline{0, k-1}, t_k = T\}$, будем формировать кусочно-постоянные реализации $u[t_0[\cdot]T]$ и $\tilde{v}[t_0[\cdot]T]$ согласно правилу

$$\begin{aligned} u[t] &= u_j^\circ \in \arg \min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(t_j, x_{t_j}[\cdot], u, v), x[t_j] - y^0[t_j] \rangle, \\ \tilde{v}[t] &= \tilde{v}_j^\circ \in \arg \max_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} \langle f(t_j, S(Y[t_j])[\cdot], u, v), x[t_j] - y^0[t_j] \rangle, \quad t \in [t_j, t_{j+1}). \end{aligned} \quad (3)$$

Т е о р е м а 1. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta > 0$, $\eta > 0$ и $M \in \mathbb{N}$, что для всех $z[\cdot] \in Z$, $m > M$ и любых допустимых реализаций $\tilde{u}[t_0[\cdot]T]$, $v[t_0[\cdot]T]$, при реализациях $u[t_0[\cdot]T]$, $\tilde{v}[t_0[\cdot]T]$, формируемых согласно (3), для решений $x[t]$ и $Y[t]$ задач (1) и (2) будет справедлива оценка $\|x[t] - y^{[0]}[t]\| \leq \varepsilon$, $t \in [t_0, T]$.

Отметим, что данный результат устойчив к неточностям измерений и вычислительным погрешностям.

Пусть теперь движение исходной системы описывается уравнением нейтрального типа

$$\begin{aligned} \dot{x}[t] - C[t]\dot{x}[t-h] &= A[t]x[t] + B[t]x[t-h] + D[t]u + E[t]v + f[t], \quad t \in [t_0, T], \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}, \\ x[t] &\in \mathbb{R}^n, \quad x[t_0 + \vartheta] = w[\vartheta], \quad \|w[\vartheta]\| \leq R_0, \quad \vartheta \in [-h, 0], \quad \|\dot{w}[\vartheta]\| \leq R_0 \text{ п.в. } \vartheta \in [-h, 0], \end{aligned} \quad (4)$$

где функции $A[t], B[t], C[t], f[t]$ ограничены и измеримы, $D[t]$ и $E[t]$ непрерывны.

Рассмотрим аппроксимирующую систему

$$\begin{aligned} \dot{y}^{[0]}[t] &= A[t]y^{[0]}[t] + B[t]y^{[m]}[t] + C[t](y^{[m-1]}[t] - y^{[m]}[t])/\Delta h + D[t]\tilde{u} + E[t]\tilde{v}, \\ \dot{y}^{[i]}[t] &= (y^{[i-1]}[t] - y^{[i]}[t])/\Delta h, \quad i = \overline{1, m}, \quad t \in [t_0, T], \quad \tilde{u} \in \mathbb{U}, \quad \tilde{v} \in \mathbb{V}, \\ y^{[i]}[t] &\in \mathbb{R}^n, \quad y^{[i]}[t_0] = y^{[i]}, \quad \|y^{[i]} - w[-i\Delta h]\| \leq \eta\Delta h, \quad i = \overline{0, m}. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть $K[t]$ — $n \times n$ -матрица-функция такая, что $dK[t]/dt = -A[t]K[t]$, $K[t_0]$ — единичная матрица, и $y^{[0]}[\xi - h] = w[\xi - t_0]$, $\dot{y}^{[0]}[\xi - h] = \dot{w}[\xi - t_0]$ при $\xi \in [t_0, t_0 + h]$. Положим

$$\begin{aligned} u[t] &= u_j^\circ \in \arg \min_{u \in \mathbb{U}} \langle K[t_j]D[t_j]u, g[t_j] \rangle, \\ \tilde{v}[t] &= \tilde{v}_j^\circ \in \arg \max_{v \in \mathbb{V}} \langle K[t_j]E[t_j]v, g[t_j] \rangle, \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$g[t] = K[t](x[t] - y^{[0]}[t]) - \int_{t_0}^t K[\xi]B[\xi](x[\xi - h] - y^{[0]}[\xi - h]) d\xi - \int_{t_0}^t K[\xi]C[\xi](\dot{x}[\xi - h] - \dot{y}^{[0]}[\xi - h]) d\xi.$$

Т е о р е м а 2. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta > 0$, $\eta > 0$ и $M \in \mathbb{N}$, что для всех $m > M$ и любых допустимых реализаций $\tilde{u}[t_0[\cdot]T)$, $v[t_0[\cdot]T)$, при реализациях $u[t_0[\cdot]T)$, $\tilde{v}[t_0[\cdot]T)$, формируемых согласно (6), для решений $x[t]$ и $Y[t]$ задач (4) и (5) будет справедлива оценка $\|x[t] - y^{[0]}[t]\| \leq \varepsilon$, $t \in [t_0, T]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. матем. и мех. 1964. Т. 28. Вып. 4. С. 716-724.
2. Репин Ю.М. О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами // Прикл. матем. и мех. 1965. Т. 29. Вып. 2. С. 226-235.
3. Куржанский А.Б. К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. С. 2094-2107.
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 458 с.
5. Красовский Н.Н., Котельникова А.Н. Стохастический поводь для объекта с последствием в позиционной дифференциальной игре // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 97-104.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления», при финансовой поддержке УрО РАН (12-П-1-1002), а также при поддержке РФФИ (12-01-00290-а).

Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. ON APPROXIMATION OF CONFLICT-CONTROLLED FUNCTIONAL DIFFERENTIAL SYSTEMS

For conflict-controlled functional differential systems, control procedures with a leader described by an approximating system of ordinary differential equations are considered.

Key words: control theory; delay equations; neutral equations.